



TITLE:

# 特異点のあるFoliationとMorseの不等式 (PL多様体及び位相多様体)

AUTHOR(S):

大和, 一夫

---

CITATION:

大和, 一夫. 特異点のあるFoliationとMorseの不等式 (PL多様体及び位相多様体). 数理解析研究所講究録 1971, 127: 12-22

ISSUE DATE:

1971-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106539>

RIGHT:

# 特異点のある *foliation* と Morse 不等式

名大 理 大 和 一 夫

## Introduction.

多様体  $M^n$  上で定義された完全積分可能な 1 次微分形式  $\omega$  について、その特異点は  $M$  の位相的構造と深い関係があると予想される。例えば特異点のない  $\omega$  をもつ  $M$  はかなり限られているであろうと Reeb は考えた。

ここでは、ある単純な条件のもとで  $\omega$  の特異点と  $M$  との間に Morse 不等式が成立することをしめす。(§3. Theorem A.)

その結果、次の基本的な問題が得られる：

多様体  $M^n$  に対してつねに、指数が 0 である特異点をもたない完全積分可能な 1-form  $\omega$  が存在するか？

これについて我々は何も知らない。

さて、§1 と 2 で、 $\omega$  の特異点の近傍の様子を教える Lemma 1.2 を証明し、それによって §3 で、我々の main theorem を証明する。

### § 1. Local theory.

$\mathbb{R}^n$  の原点  $0$  を含む open set で def された 1-form  $\omega = \sum a_i(x) dx^i$  が class  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , で  $\omega \wedge d\omega = 0$ , そして原点を nondegenerate singular point としてもつ, i.e.,  $a_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\det(a_{ij}) \neq 0$ , 但し  $a_{ij} = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j}\right)_{x=0}$ , と仮定する. このとき Reeb によって

Lemma 1.1.  $n \geq 3$  のとき matrix  $(a_{ij})$  は symmetric.

が知られている. そこで  $(a_{ij})$  の負の固有値の個数を  $\lambda$  とすると

Lemma 1.2.  $n \geq 3$ ,  $\lambda \neq 2$ ,  $n - \lambda \neq 2$  のとき, 原点  $0$  の nbd  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  と homeomorphism  $h: V \rightarrow U$  が存在して次の条件をみたす:

- (i).  $h(0) = 0$  で,  $(V, df)$  の integral manifold を  $(U, \omega|_U)$  の integral manifold にうつす. ここで  $f = -(x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + \dots + (x^n)^2$ .
- (ii).  $h$  は  $V$  の open dense subset  $V_0$  で class  $C^r$  の diffeomorphism.
- (iii).  $h$  は向きを保つ, i.e.,  $\omega(h_* \text{grad} f) > 0$  on  $V_0$ .

Remark 1.  $\lambda = 2$  のときも次の条件をみたしていれば上の

主張成立:

$(a_{ij})$  の負の固有値に属する固有空間  $E^2 \subset \mathbb{R}^n$  に対して  $\omega$  を  $E^2$  に制限したもの  $(\omega \text{ の domain } \cap E^2, \omega|_{\omega \text{ の domain } \cap E^2})$  の原点の nbd の leaf がすべて compact.

Remark 2.  $n-\lambda=2$  のとき、上の主張で (i) を次のように変え  
ると成立:

(i').  $h$  は,  $(V, df)$  の integral manif. で  $h$  での  $f$  の値が  $\leq 0$   
なるものを  $(U, \omega|_U)$  の integral manif. にうつす.

$\lambda=0$  或  $\lambda=n$  のときこの Lemma はすでに Reeb によってしられ  
ている. あらためてかきなおすと

Reeb の定理.  $\lambda=0$  或  $n$  のとき, 原点の nbd  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ )  
と homeom.  $h: V \rightarrow U$ ,  $h(0)=0$ , が存在して

(i).  $h$  は 0 以外で  $C^r$ -diffeom. で,  $\forall x \in V$  に対し  $\exists a > 0$  s.t.  $h(x) = ax$ .

(ii). 中心 0 の半径  $\rho$  の球面  $S^{n-1}(\rho) \subset V$  は  $h$  によって  $U$  の leaf に  
うつる.

§ 2. Lemma 1.2 の証明.

Lemma 1.2 の proof を簡単のため  $\lambda \neq 1$ ,  $n-\lambda \neq 1$  として行う.

まずそのまえにひとつ準備する.

2.1.  $\mathbb{R}^2$  の原点の nbd で def. された 1-form  $\alpha$  が

$$\alpha = b(y, z) dy + c(y, z) dz,$$

$$b(0, 0) = c(0, 0) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

とする. 但し  $(y, z)$  は標準的な座標系.

この  $\alpha$  に対して vector field  $A$  を

$$A = -c(y, z) \frac{\partial}{\partial y} + b(y, z) \frac{\partial}{\partial z}$$

と def. すると、その linear part は  $A' = -z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}$  . そして

$$R_+^2 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, z \geq 0\},$$

$$\Delta(p) = \{(y, 0) \mid 0 \leq y \leq p\} \cup \{(0, z) \mid 0 \leq z \leq p\}, \quad p > 0,$$

とおく.  $p > 0$  が

$$b(y, 0) < 0 \text{ for } 0 < y \leq p, \quad c(0, z) < 0 \text{ for } 0 < z \leq p,$$

をみたすとする.  $\Lambda > 0$  を十分小とする.

そこで、写像  $\pi[\alpha]: \Delta(p) \times [0, \Lambda] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$  を 次のように def. する:

$(w, \lambda) \in \Delta(p) \times [0, \Lambda]$  に対して

$w \neq (0, 0)$  のとき,  $\pi[\alpha](w, \lambda) = w$  をといる integral curve of  $-A$  上の点,  $w$  からの arc length が  $\lambda$ .

$w = (0, 0)$  のとき,  $\pi[\alpha](w, \lambda) =$  原点をといる stable manif. of  $A$  上の点  $\in P_+^2$  で 原点からの arc length が  $\lambda$ .

2.2. Proof of Lemma 1.2 ( $\lambda \neq 1, n - \lambda \neq 1$  として).

$\lambda = n$  or  $\lambda = 1$  のとき Reeb の定理に一致. よって  $3 \leq \lambda \leq n-3$  とする. また (必要なら座標変換して)

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 & \ddots \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

とする.

$\omega$  を  $\mathbb{R}^\lambda \times 0$  に制限すると index  $\lambda$ . よって Reeb の定理より

原点の  $\pi$ bd  $U^-, V^- \subset \mathbb{R}^2$ , homeom.  $h^-: V^- \rightarrow U^-$ ,  $h^-(0) = 0$  を次のようなものとする:

(i).  $h$  は 0 以外で  $C^r$ -diffeom. で,  $\forall x^- \in V^-$  に對し  $\exists a > 0$  s.t.  $h^-(x^-) = ax^-$ .

(ii).  $(V^- \times 0, df^-|_{V^- \times 0})$  の各 leaf を  $(U^- \times 0, \omega|_{U^- \times 0})$  の leaf にうつす. 但し  $f^- = -(x^1)^2 - \dots - (x^n)^2$ .

ここで  $\omega|_{U^- \times 0}$  は 0 以外に singular point をもたないことに注意する. 同様に  $U^+, V^+ \subset \mathbb{R}^2$ ,  $h^+: V^+ \rightarrow U^+$ ,  $f^+ = (x^{n+1})^2 + \dots + (x^n)^2$  がとれる.

さて,  $x = (x^-, x^+) \in V^- \times V^+ \subset \mathbb{R}^n$  に對して  $h(x) \in \mathbb{R}^n$  を次のように def. する:

a).  $x^+ = 0$  のとき,  $h(x) = h^-(x^-) \times 0 \in U^- \times 0 \subset \mathbb{R}^n$ .

b).  $x^- = 0$  のとき,  $h(x) = 0 \times h^+(x^+) \in 0 \times U^+ \subset \mathbb{R}^n$ .

c).  $x^- \neq 0, x^+ \neq 0$  のとき,  $h(x) = T \cdot \pi[T^* \omega](T^{-1} \cdot h^- \cdot T(w), \lambda)$ ,

但し

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  は linear map defined by  $T(1, 0) = \frac{x^-}{\|x^-\|}$ ,  $T(0, 1) = \frac{x^+}{\|x^+\|}$ .

$(w, \lambda) \in \Delta(p) \times [0, \Lambda]$  は 1 系:  $x = T \cdot \pi[T^*d(f^- + f^+)](w, \lambda)$  で def. される. また  $\pi[\ ]$  は 2.1 において def. された写像.

このようにして def. した  $h$  が求めるものであることが確かめられる.

### § 3. 定理 A とその証明

$M^n$  を closed connected  $C^\infty$  manifold,  $n \geq 3$ , とする.  $\omega$  を  $M^n$  上の 1-form で class  $C^r$ ,  $r \geq 2$ ,  $\omega \wedge d\omega = 0$ , その singular points はすべて nondegenerate とする.  $c_\lambda$  で  $\omega$  の index  $\lambda$  の singular pts の 個数,  $b_\lambda$  で  $M^n$  の  $\lambda$ th Betti 数をあらわす.

#### 3.1.

Theorem A.  $c_0 \neq 0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_{n-2} = 0$  ならば Morse 不等式:

$$b_\lambda - b_{\lambda-1} + \cdots \pm b_0 \leq c_\lambda - c_{\lambda-1} + \cdots \pm c_0 \quad \text{for } \lambda = 0, \dots, n,$$

が成立する.

Remark.  $\omega$  が closed あるいは  $M, \omega$  が real analytic なら  $c_{n-2} = 0$  の仮定はいらない.

証明のためのいくつかの定義を与える.

#### 3.2. Leaflet と leaf.

Def. connected  $(n-1)$ -submanifold  $L \subset M^n$  が leaflet とは,  $L$  が  $\omega$  の integral manifold で (包含関係で) 極大なものであるときとする. leaflet  $L$  が incomplete とは, curve  $c: [0, 1] \rightarrow M^n$ ,  $c([0, 1)) \subset L$ ,  $c(1) = \text{singular pt}$ , が存在するときとする. この singular pt を  $L$  の limit pt とよぶ.

Def. leaflets  $L_1, \dots, L_\ell$  と singular pts  $p_1, \dots, p_m$  が 次の条件をみたすとき,  $M$  の subset  $\tilde{L} = L_1 \cup \dots \cup L_\ell \cup p_1 \cup \dots \cup p_m$  を leaf とよぶ.  $m \geq 1$  のとき singular leaf とくにいう:

- (i).  $L_i \cap L_j = \emptyset$  for  $i \neq j$ ,  $p_i \neq p_j$  for  $i \neq j$ .
- (ii). incomplete な  $L_i$  に対して その limit pt は  $p_1, \dots, p_m$  のどれかと一致. 又, どの  $p_j$  に対しても  $p_j$  を limit pt としてもつ leaflet は  $L_1, \dots, L_e$  のどれかと一致.
- (iii). どの  $L_i$  と  $p_j$  に対しても,  $L_i$  の limit pt  $p_{i_1}$  がとれてそれを limit pt とする  $L_{i_2}$  がとれて  $\dots$  このような process で  $p_j$  が得られる.
- 以下,  $x \in M$  に対して  $L(x)$  で  $x$  をとる leaf をあらわす.

### 3.3. Translation.

$M$  の Riemann metric を ひとつ fix して,  $Y = \omega^* = \omega$  の dual vector field,  $\{\psi_t\}$  を  $M$  の one param. tr. gr. gen. by  $\dot{\psi}_t = Y$ , とする.

Def.  $P_0, P_1$  を  $M$  の subsets で 夫々 ある leaflet  $L_1, L_2$  に含まれているとする.  $P_0$  が  $P_1$  に translate できるとは 写像

$$T: P_0 \times [0, 1] \rightarrow M$$

- s.t. (i).  $T|_{P_0 \times 0} = \text{id}$ ,  $T|_{P_0 \times 1}: P_0 \rightarrow P_1$  homeomorphism,
- (ii).  $\forall t \in [0, 1]$  に対して  $T(P_0 \times t)$  は ある leaflet に含まれ,
- (iii).  $\forall p \in P_0$  に対して, curve  $T|_{p \times t}$   $t \in [0, 1]$  の tangent vector は  $Y(T(p, t))$  の正数倍.

Remark. 上の def. ①,  $P_0$  に対して 次のような条件がみたされているとき  $T$  は 1-1:

$\exists N^n \subset M^n$  compact submanifold s.t.  $P_0 \subset \partial N$ ,  $\partial N$  の連結成分は 夫々 一つの leaf になっていて, そして  $Y|_{\partial N}$  は 外向き.



Remark.  $L \subset M^n$  を nonsingular compact leaf とする. もし  $L$  がそれ自身に translate できるなら, すべての leaf は  $L$  に diffeom.

3.4. 次の仮定のもとで次の2つの Lemmas が成立する:

$L \subset M^n$  を compact nonsingular leaf,  $q \in L$  とする. そして  $\forall t > 0$  に対して  $L$  が leaf  $L(\psi_t(q))$  に translate できるとする.

Lemma.  $M^n$  のすべての leaf は  $L$  に diffeomorphic かそれとも  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(q)$  が存在して  $\omega$  の singular pt かのどちらか.

Proof.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(q)$  が存在せぬなら,  $0 < t_1 < t_2$  s.t.  $L(\psi_{t_1}(q)) = L(\psi_{t_2}(q))$ . よって 3.3 の Remark よりすべての leaf は  $L$  に diffeom.

Lemma.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(q) = p$  が存在するとき,  $p$  を含む singular leaf を

$$\tilde{L} = L_1 \cup \dots \cup L_l \cup p_1 \cup \dots \cup p_m, \quad p_1 = p,$$

とし,  $\lambda_i = p_i$  の index,  $q'_j \in L_j$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, l$ ,

とおく.

(i). もし  $\lambda_i \neq 1 \quad \forall i = 1, \dots, m$  ならば  $\tilde{L}$  は compact.

(ii). もし  $\lambda_i \neq 1$  かつ  $\lambda_i \neq n-2 \quad \forall i = 1, \dots, m$  で  $\pi_1(L) = 0$  ならば このとき  $\exists \delta_j > 0$  s.t.  $L(\psi_t(q'_j))$ ,  $0 < t \leq \delta_j$ , は nonsingular compact で  $\pi_1 = 0$ . そして manifold  $L(\psi_{\delta_1}(q'_1)) \cup \dots \cup L(\psi_{\delta_l}(q'_l))$  は  $L$  に各次数が  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  の  $m$  回の spherical modifications をまとめたものである.

Proof of (i).  $L_1$  は  $p_1$  を limit pt としてもつとする.

Assertion 1.  $\forall x \in L_1$  に対して  $\exists s > 0, \exists x_0 \in L$  s.t.  $x = \psi_s(x_0)$ .

これを証明するのに,  $x$  が  $p_1$  に十分近くて Lemma 1.2 の nbd  $U$  に含まれているとしてよい. このとき  $\exists \varepsilon > 0$  s.t.  $\psi_{-\varepsilon}(x) \in U$ .

すると  $\exists \varepsilon > 0$  s.t.  $\psi_{-\varepsilon}(x) \in h(f^{-1}(-\varepsilon))$ . ところが  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(q) = p$  だから,  $\exists t > 0$  s.t.  $\psi_t(q) \in h(f^{-1}(-\varepsilon))$ . 一方明らかに  $f^{-1}(-\varepsilon) \approx S^{\lambda-1} \times \dot{D}^{n-\lambda}$  ( $\lambda$  は  $p_1$  の index).  $\lambda \neq 1$  なのだから connected.

よって  $\psi_{-\varepsilon}(x)$  と  $\psi_t(q)$  とを結ぶ curve で leaf に含まれるものか  
とれる. ところが  $L(\psi_t(q))$  に  $L$  は translate できる. よって

$x_0 \in L$  がとれて ある  $s > 0$  に対して  $x = \psi_s(x_0)$ . Assertion 1 が  
しめされた. 次に,  $L_1$  が limit pt  $p_2$  をもつとする. 同様にして

Assertion 2.  $\exists w_0 \in L$  s.t.  $p_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(w_0)$ .

これら二つの Assertions から,

Assertion 3.  $\tilde{L}$  の任意の点に  $L(\psi_t(q))$  が限りなく近づく.

$M^n$  は compact だから,

Assertion 4.  $\tilde{L}$  が noncompact なら,  $\forall \varepsilon > 0$  に対して  
 $\exists j \in \{1, \dots, l\}, \exists z \in L_j, \exists \tau > 0$  s.t.  $\psi_{-\tau}(z) \in L_j$  かつ  
 $\text{dis}(z, \psi_{-\tau}(z)) < \varepsilon$ .

もはや Lemma (i) の証明を終えることは容易.

Proof of Lemma.(ii).

簡単のために,  $\lambda_i \neq n-1$  for  $\forall i=1, \dots, m$ . として証明する.

そうすると,  $\tilde{L} = L_1 \cup p_1 \cup \dots \cup p_m$ ,  $2 \leq \lambda_i \leq n-3$ . となる.

各  $p_j$ ,  $j=1, \dots, m$ , に対して,  $p_j$  の nbd  $U_j$ , homeom.  $h_j: \dot{D}^n(p) \rightarrow U_j$ ,  $f_j$  が Lemma 1.2 の条件を満たすようにとれる. ( $\lambda_j=2$  のときはその Remark による.) そして,  $q_i \notin U_1 \cup \dots \cup U_m$ ,  $U_j \cap \tilde{L} = h_j(f_j^{-1}(o))$  ( $\tilde{L}$ : compact!) とする. そこで,  $W_j = h_j(\dot{D}^n(\varepsilon)) \subset U_j$ ,  $\varepsilon > 0$  + 十分小, とおくと

$$\tilde{L}_0 = \tilde{L} - W_1 \cup \dots \cup W_m$$

は次の条件をみたす:

$$\exists \text{ imbedding } k: S^{\lambda_1-1} \times \dot{D}^{n-\lambda_1} \cup \dots \cup S^{\lambda_m-1} \times \dot{D}^{n-\lambda_m} \rightarrow L(\psi_\tau(q))$$

s.t.  $L(\psi_\tau(q)) - \text{Im } k$  は  $\tilde{L}_0$  に translate できる. ( $\tau > 0$  + 十分大)

明らかに

$$\pi_1(\tilde{L}_0) = \pi_1(L(\psi_\tau(q)) - \text{Im } k) = 0. \quad (2 \leq \lambda_i \leq n-3!)$$

従って  $\tilde{L}_0$  は少しなら translate できる. すなわち,

$\delta > 0$  と leaflet  $L(\psi_\delta(q_i))$  の submanifold  $\tilde{L}_0$  が存在して

次の条件をみたす:

(i).  $\tilde{L}_0$  は  $\tilde{L}_0$  に translate できる

(ii).  $2\tilde{L}_0 = J_1 \cup \dots \cup J_m$ ,  $J_i \subset U_i$   $i=1, \dots, m$  とかける.

このとき,  $J_i \approx S^{\lambda_i-1} \times S^{n-\lambda_i-1}$  だから  $J_i$  は connected.

( $2 \leq \lambda_i \leq n-3!$ ) よって  $r_i > 0$  が存在して  $J_i \subset h_i(f_i^{-1}(r_i))$ .

$h(f_i^{-1}(z_i)) \subset M$  が一つの integral manifold であるから 集合

$$\tilde{L}_0 \cup h_1(f_1^{-1}(z_1)) \cup \dots \cup h_m(f_m^{-1}(z_m))$$

も integral manifold, しかも boundary がなくて compact, connected.  
よって  $L(\psi_g(q))$  も compact nonsingular leaf. Lemma の残りの  
証明は容易.

3.5. Lemma.  $L \subset M^n$  を compact nonsingular leaf,  $q \in L$   
とする. そして  $t_0 > 0$  が次の条件をみたすとする:

- (i).  $L$  は leaf  $L(\psi_{t_0}(q))$  に translate できない.
- (ii).  $0 < t < t_0$  に対して  $L$  は leaf  $L(\psi_t(q))$  に translate できる.

このとき  $\exists q' \in L$  s.t.  $\forall t > 0$  に対して  $L$  は  $L(\psi_t(q'))$  に translate  
可能で  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(q')$  が存在して singular pt.

Proof. むっかしくない.

3.6. Theorem A の証明.

Theorem A は 3.4 及び 3.5 の Lemmas の直接の結果である.